

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 23.01.2010**

Cls. a X-a

- I. a) Să se arate că dacă $x = \log_a bc, y = \log_b ac, z = \log_c ab$, atunci $x + y + z + 2 = xyz$
b) Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Arătați că dacă, $2^a = 35, 5^b = 14, 7^c = 10$
atunci $abc - (a + b + c) = 2$. (1p) oficiu

Soluție: a) $a^x = bc, b^y = ac, c^z = ab$. (1p)

$$a^{xyz} = (bc)^{yz} = (ac)^z (ab)^y = \quad (1p)$$

$$= a^{z+y} c^z b^y = a^{z+y+2} bc = a^{x+y+z+2} \Rightarrow x + y + z + 2 = xyz. \quad (1p)$$

$$b) 2^a = 5 \cdot 7, 5^b = 2 \cdot 7, 7^c = 2 \cdot 5 \Rightarrow 2^{abc} = 5^{bc} \cdot 7^{bc} = 2^c \cdot 2^b \cdot 7^c \cdot 5^b =$$

$$= 2^{b+c+2} \cdot 35 = 2^{b+c+2} \cdot 2^a = 2^{a+b+c+2} \Rightarrow abc = a + b + c + 2. \quad (1p)$$

- II. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 astfel încât $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}, z_3 \cdot z_1 + \overline{z_3} \cdot z_2 \in \mathbb{R}$
și $z_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Să se demonstreze că $z_1^{2010} + z_2^{2010} \in \mathbb{R}$. (1p) oficiu

Soluție: $z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 + z_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2} \Rightarrow z_1 - \overline{z_2} = \overline{z_1} - z_2 \quad (1)$ (1p)

$$z_3 \cdot z_1 + \overline{z_3} \cdot z_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z_3 \cdot z_1 + \overline{z_3} \cdot z_2 = \overline{z_3 \cdot z_1 + \overline{z_3} \cdot z_2} \Rightarrow z_3(z_1 - \overline{z_2}) = \overline{z_3}(\overline{z_1} - z_2) \quad (2) \quad (2p)$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow z_3(z_1 - \overline{z_2}) = \overline{z_3}(\overline{z_1} - z_2) \Rightarrow (z_1 - \overline{z_2})(z_3 - \overline{z_3}) = 0 \quad (3) \quad (1p)$$

$$\text{Deoarece } z_3 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow z_3 \neq \overline{z_3} \quad (4)$$

$$\text{Din (3) și (4)} \Rightarrow \overline{z_1} = z_2 \Rightarrow \overline{z_1^{2010}} = z_2^{2010} \Rightarrow z_1^{2010} + z_2^{2010} = z_1^{2010} + \overline{z_1^{2010}} \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

- III. Să se demonstreze că $\forall a, b, c \in (1, \infty)$, are loc inegalitatea:

$$(ab)^{\sqrt{\log_a c \cdot \log_b c}} + (bc)^{\sqrt{\log_b a \cdot \log_c a}} + (ac)^{\sqrt{\log_a b \cdot \log_c b}} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Se cunoaște: dacă $x, y > 1$, atunci $\log_x y > 0$. (1p) oficiu

Soluție: $(ab)^{\sqrt{\log_a c \cdot \log_b c}} \geq c^2 \Leftrightarrow \sqrt{\log_a c \cdot \log_b c} (\log_c a + \log_c b) \geq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\log_c a + \log_c b) \geq 2\sqrt{\log_c a \log_c b}. \quad (3p)$$

Se arată în mod analog pentru ceilalți termeni. (2p)

Se însumează relațiile. (1p)

- IV. Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ cu $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ și $|z_1| = a, |z_2| = b, |z_3| = c$. Știind că $a^2 + b^2 = c^2$,
arătați că $b^2 z_1^2 + a^2 z_2^2 = 0$.

(Gazeta Matematică nr.3/2009)

Soluție: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0 \Rightarrow$ (1p) oficiu

$$\Rightarrow \frac{a^2}{z_1} + \frac{b^2}{z_2} + \frac{c^2}{z_3} = 0 \Rightarrow \frac{a^2}{z_1} + \frac{b^2}{z_2} = -\frac{c^2}{z_3} \Rightarrow \quad (2p)$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2) z_1 z_2 + a^2 z_2^2 + b^2 z_1^2 = (a^2 + b^2) z_1 z_2 \Rightarrow a^2 z_2^2 + b^2 z_1^2 = 0. \quad (3p)$$